Împărțirea cu rest zero și cu rest. Teorema împărțirii cu rest

Clasa a 5-a · teorie

📘 Teorie pe înțelesul tuturor

1. Împărțirea exactă (rest zero)

A împărți numerele **a** și **b** (cu b ≠ 0) înseamnă să găsim numărul **c** pentru care **a = b · c**. Scriem **a : b = c**.

- **a** se numește **deîmpărțit**, **b** se numește **împărțitor**, iar **c** se numește **cât**.
- Împărțirea exactă se mai numește **împărțire cu rest zero**.
- **Proba** se face prin înmulțire: dacă a : b = c, atunci **b · c = a**. Putem verifica și printr-o altă împărțire: a : c = b.

Reguli de aur (le ții minte ușor!)

- **0 : b = 0** pentru orice b ≠ 0 (nimic împărțit la ceva rămâne nimic).
- **a : 1 = a** și **a : a = 1** (pentru a ≠ 0).
- **Nu se poate împărți la 0!** Expresia a : 0 nu are sens.
- Câtul a două numere naturale **nu este întotdeauna** număr natural (de exemplu 7 : 2 nu are cât natural exact).
- **Împărțirea la 10, 100, 1000:** „tăiem” 1, 2, respectiv 3 zerouri de la sfârșitul deîmpărțitului. Exemplu: 45000 : 100 = 450, iar 69000 : 1000 = 69.

2. Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi două numere naturale **a** și **b**, cu **b ≠ 0**, există două numere naturale **q** și **r**, unic determinate, astfel încât:

$$a = b \cdot q + r, \quad r < b$$

- **a** = deîmpărțitul, **b** = împărțitorul, **q** = câtul, **r** = restul.
- Condiția **r < b** este esențială: restul este **întotdeauna mai mic decât împărțitorul**.
- La împărțirea cu **b**, resturile posibile sunt **0, 1, 2, ..., b − 1** (în total b resturi).
- Dacă **r = 0**, împărțirea este exactă.
- **Proba:** calculăm **b · q + r** și trebuie să obținem deîmpărțitul a.

Exemplu rezolvat 1 – împărțirea „în scris”

Efectuăm 9806 : 27 și facem proba.

```
 9806 : 27 = 363
-81
 ──
 170
-162
 ───
   86
  -81
  ──
    5   ← restul
```

Deci **9806 : 27 = 363 rest 5**. Observăm că 5 < 27 ✓.
Proba: 27 · 363 + 5 = 9801 + 5 = **9806** ✓

Exemplu rezolvat 2 – aflarea deîmpărțitului

La o împărțire, împărțitorul este 12, câtul 25 și restul 7. Aflați deîmpărțitul.

Folosim teorema: a = b · q + r = 12 · 25 + 7 = 300 + 7 = **307**.

Exemplu rezolvat 3 – toate numerele cu un cât dat

Aflați numerele naturale care împărțite la 5 dau câtul 8.

Scriem a = 5 · 8 + r = 40 + r, cu r < 5, deci r poate fi 0, 1, 2, 3 sau 4.
Numerele sunt: **40, 41, 42, 43, 44**.

Exemplu rezolvat 4 – cel mai mare număr cu o proprietate

Aflați cel mai mare număr natural care împărțit la 37 dă câtul de 5 ori mai mic decât restul.

Notăm restul cu **r** și câtul cu **q**. Știm că r = 5 · q și că r < 37. Cel mai mare r care este multiplu de 5 și mai mic decât 37 este 35, deci q = 7.
Numărul este a = 37 · 7 + 35 = 259 + 35 = **294**.

Exemplu rezolvat 5 – problemă cu „ultimul rând”

47 de puieți se plantează pe rânduri de câte 5. Câți puieți sunt pe ultimul rând?

47 : 5 = 9 rest 2 (pentru că 5 · 9 + 2 = 47). Sunt 9 rânduri pline, iar pe ultimul rând (incomplet) sunt **2 puieți**.

⚠️ Greșeli frecvente

- Un rest **mai mare sau egal** cu împărțitorul este întotdeauna greșit (de exemplu „47 : 5 = 8 rest 7” nu e corect, trebuia 9 rest 2).
- Uităm să facem proba: **b · q + r** trebuie să dea exact deîmpărțitul.
- Când câtul are zerouri pe parcurs (de exemplu 6125 : 6 = 1020 rest 5), nu uităm să scriem cifra 0 în cât.
- Confundăm „de k ori mai mare” (se înmulțește) cu „de k ori mai mic” (se împarte).