Model de test nr. 9 · BAREM

nivel ridicat

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se calculează împărțind la 10 punctajul total obținut. Subiectele I și II: 5 puncte pentru răspunsul corect, 0 puncte altfel. Subiectul al III-lea: punctajul se acordă conform baremului; orice altă rezolvare corectă se punctează echivalent.

SUBIECTUL I — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	a	a	b	c	b	F

1. $2^{5^{0}} : 2^{48} = 2^2 = 4$, iar $(-1)^{2^{0^{25}}} = -1$ (exponent impar). Deci $4 + 9\cdot(-1) = 4 - 9 = -5$.

2. Din $2a = 3b$ rezultă $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. Atunci $\frac{3a+b}{b} = 3\cdot\frac{a}{b} + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$.

3. Fie x prețul inițial. După scădere: 0,8x. După creștere: $0{,}8x\cdot(1 + p/100) = x$, deci $1 + p/100 = 1{,}25$ și $p = 25$.

4. $-5 < 2n - 1 \le 9 \Rightarrow -4 < 2n \le 10 \Rightarrow -2 < n \le 5$. Numerele întregi sunt −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, adică 7 numere.

5. $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = 10 + 2\sqrt{21}$, iar $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = 10 - 2\sqrt{21}$. Diferența este $4\sqrt{21}$.

6. Media aritmetică este $((3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5})) : 2 = 6 : 2 = 3$, nu $\sqrt{5}$. Afirmația este falsă.

SUBIECTUL al II-lea — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	b	b	b	c	d	c

1. Cu AB = 2k, BC = 3k, CD = 5k: 10k = 40, deci k = 4 și AB = 8, BC = 12, CD = 20 cm. M este la 4 cm de A, iar N este la 40 − 10 = 30 cm de A. MN = 30 − 4 = 26 cm.

2. $m(\angle BOC) = 160° - 40° - 60° = 60°$, deci $m(\angle BOM) = 30°$. Atunci $m(\angle AOM) = m(\angle AOB) + m(\angle BOM) = 40° + 30° = 70°$.

3. Aria triunghiului echilateral cu latura l este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Din $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ rezultă $l^2 = 36$, deci l = 6 cm, iar perimetrul este $3\cdot 6 = 18$ cm.

4. Diagonalele sunt congruente și se înjumătățesc: OA = OB = 8 cm. Triunghiul AOB este isoscel cu un unghi de 60°, deci echilateral și AB = 8 cm. $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 256 - 64 = 192$, deci $BC = 8\sqrt{3}$ cm. Aria = $8\cdot 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ cm².

5. Arcul mic BC are $2\cdot 40° = 80°$ (unghiul înscris BAC are jumătate din arcul pe care îl subîntinde). Arcul mare BAC are $360° - 80° = 280°$, deci $m(\angle BDC) = 280° : 2 = 140°$. (Patrulaterul ABDC este inscriptibil,

deci unghiurile opuse A şi D au suma 180°.)

6. Dacă latura pătratului este l, diagonala este $l\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, deci l = 10 cm. Înălţimea cilindrului este latura pătratului: 10 cm.

SUBIECTUL al III-lea — 30 de puncte

1. Un număr natural de două cifre este de 7 ori mai mare decât suma cifrelor sale.

2p **a)** Verifică dacă numărul 42 are această proprietate.

Suma cifrelor lui 42 este 4 + 2 = 6 **(1p)**, iar 7·6 = 42. Deci numărul 42 are proprietatea. **(1p)**

3p **b)** Determină toate numerele de două cifre care au această proprietate.

Fie numărul 10a + b, cu a ≠ 0. Condiția devine 10a + b = 7(a + b). **(1p)** Rezultă 3a = 6b, adică a = 2b. **(1p)** Cum a este cifră nenulă, b ∈ {1, 2, 3, 4}, iar numerele sunt 21, 42, 63 și 84. (Pentru b = 0 ar rezulta a = 0, imposibil.) **(1p)**

2. Se consideră numerele $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$ și $b = 3 - \sqrt{((\sqrt{5}-3)^2)} + \sqrt{20}$.

2p **a)** Arată că a = 2/3.

Amplificăm termenii: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3}$. **(1p)** Prin însumare se reduc termenii opuși: $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. **(1p)**

3p **b)** Stabilește dacă a + b ∈ [7, 8).

Cum $\sqrt{5} < 3$, avem $\sqrt{((\sqrt{5}-3)^2)} = |\sqrt{5}-3| = 3 - \sqrt{5}$, iar $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Deci $b = 3 - (3 - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. **(1p)** $a + b = \frac{2}{3} + 3\sqrt{5} = \frac{2}{3} + \sqrt{45}$. Cum $6 < \sqrt{45} < 7$, avem $\frac{20}{3} < a + b < \frac{23}{3}$; pentru o încadrare mai fină: $6\frac{1}{3} = \frac{19}{3}$ cu $\frac{361}{9} = 40{,}1\ldots \le 45$, deci $\sqrt{45} \ge \frac{19}{3}$, iar $\left(\frac{22}{3}\right)^2 = \frac{484}{9} = 53{,}7\ldots > 45$, deci $\sqrt{45} < \frac{22}{3}$. **(1p)** Atunci $a + b \in \left(\frac{21}{3}, \frac{24}{3}\right) = (7, 8)$, adică a + b ∈ [7, 8). **(1p)**

3. Prețul unui obiect se reduce cu 20%, apoi noul preț se reduce cu 25%, iar la final prețul obținut se majorează cu 50%.

2p **a)** Arată că prețul final reprezintă 90% din prețul inițial.

Fie p prețul inițial. După prima reducere: 0,8p. **(1p)** După a doua reducere: 0,75·0,8p = 0,6p, iar după majorare: 1,5·0,6p = 0,9p = 90% din p. **(1p)**

3p **b)** Dacă prețul final este 270 de lei, determină prețul inițial.

0,9p = 270 **(1p)**, deci p = 270 : 0,9 **(1p)** = 300 de lei. Verificare: 300 → 240 → 180 → 270. **(1p)**

4. În figura alăturată este reprezentat pătratul ABCD, cu AB = 12 cm. Punctul M este mijlocul laturii BC, iar N este mijlocul laturii CD. Dreptele AM și BN se intersectează în punctul P.

2p **a)** Demonstrează că AM ⊥ BN.

Triunghiurile ABM și BCN sunt congruente (LUL): AB = BC, BM = CN și m(∠ABM) = m(∠BCN) = 90°. **(1p)** Rezultă m(∠BAM) = m(∠CBN). Atunci, în triunghiul ABP: m(∠BAP) + m(∠ABP) = m(∠CBN) + m(∠ABP) = m(∠ABC) = 90°, deci m(∠APB) = 90° și AM ⊥ BN. **(1p)**

3p **b)** Arată că $BP = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ cm.

Din triunghiul dreptunghic ABM: BM = 6 cm și $AM^2 = 144 + 36 = 180$, deci $AM = 6\sqrt{5}$ cm. **(1p)** Cum BP ⊥ AM, BP este înălțime în triunghiul ABM, deci aria(ABM) = AB·BM : 2 = AM·BP : 2. **(1p)** $BP = \frac{12 \cdot 6}{6\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ cm. **(1p)**

5. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic ABCD, cu AB ∥ CD, m(∠A) = m(∠D) = 90°, AB = 4 cm și CD = 9 cm. Diagonalele AC și BD sunt perpendiculare.

2p **a)** Arată că triunghiurile ABD și DAC sunt asemenea.

Fie O = AC ∩ BD. În triunghiul AOD, m(∠OAD) + m(∠ODA) = 90°, adică m(∠DAC) + m(∠ADB) = 90°. **(1p)** Cum m(∠DAB) = 90°, în triunghiul ABD avem m(∠ADB) + m(∠ABD) = 90°. Rezultă m(∠DAC) = m(∠ABD). Triunghiurile ABD și DAC au m(∠BAD) = m(∠ADC) = 90° și m(∠ABD) = m(∠DAC), deci sunt asemenea (UU). **(1p)**

3p **b)** Calculează lungimea laturii AD.

Din asemănarea ΔABD ~ ΔDAC (A ↔ D, B ↔ A, D ↔ C) rezultă AB/DA = AD/DC = BD/AC. **(1p)** Deci $AD^2 = AB \cdot DC$ **(1p)** = 4·9 = 36, adică AD = 6 cm. **(1p)**

6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată REMS, cu vârful R, baza triunghiul echilateral EMS, cu EM = 12 cm, și muchiile laterale RE = RM = RS = 10 cm. Punctul O este centrul bazei, iar RO este înălțimea piramidei.

2p **a)** Arată că înălțimea RO a piramidei este egală cu $2\sqrt{13}$ cm.

Înălțimea triunghiului EMS este $6\sqrt{3}$ cm, iar O este centrul de greutate: $EO = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm. **(1p)** RO ⊥ (EMS), deci RO ⊥ EO, iar $RO^2 = RE^2 - EO^2 = 100 - 48 = 52$, adică $RO = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm. **(1p)**

3p **b)** Calculează suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.

Fiecare față laterală este un triunghi isoscel cu laturile 10, 10 și 12 cm. Înălțimea din R pe EM cade în mijlocul lui EM: $h^2 = 100 - 36 = 64$, deci h = 8 cm. **(1p)** Aria unei fețe laterale = 12·8 : 2 = 48 cm². **(1p)** Cele trei fețe laterale sunt congruente, deci suma ariilor lor este 3·48 = 144 cm². **(1p)**