Model de test nr. 8 · BAREM

nivel ridicat

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se calculează împărțind la 10 punctajul total obținut. Subiectele I și II: 5 puncte pentru răspunsul corect, 0 puncte altfel. Subiectul al III-lea: punctajul se acordă conform baremului; orice altă rezolvare corectă se punctează echivalent.

SUBIECTUL I — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	c	c	b	b	b	F

1. Un număr de forma $2^2\cdot3^1\cdot5^1$ are $(2+1)(1+1)(1+1)=3\cdot2\cdot2=12$ divizori naturali.

2. $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{3+5+7}=\frac{45}{15}=3$, deci $c=7\cdot3=21$.

3. Fie p prețul inițial. După creștere: 1,25p; după scădere: $0{,}8\cdot1{,}25p=p$. Deci prețul inițial este chiar 300 de lei.

4. $5<\sqrt{30}<6$, deci $-6<-\sqrt{30}<-5$, iar $4<\sqrt{20}<5$. Numerele întregi din interval sunt $-5, -4, \ldots, 3, 4$. Perechile de numere opuse au suma 0, deci suma este -5.

5. $x=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ și $y=3\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. Media geometrică este $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{3}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

6. Din $-2<x\le3$ rezultă $-4<2x\le6$, apoi $-5<2x-1\le5$. Deci $2x-1\in(-5,5]$. Intervalul $(-5,6]$ este mai mare decât cel obținut, deci afirmația este falsă.

SUBIECTUL al II-lea — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	a	c	b	b	a	b

1. AD = 10 + 6 + 14 = 30 cm, deci AM = 15 cm. BN = 3 cm, deci AN = 10 + 3 = 13 cm. MN = AM − AN = 15 − 13 = 2 cm.

2. $m(\angle MON)=m(\angle MOB)+m(\angle BON)=m(\angle AOB):2+m(\angle BOC):2=(m(\angle AOB)+m(\angle BOC)):2=130^\circ:2=65^\circ$.

3. $BC=2\cdot AB=12$ cm (cateta AB se opune unghiului de 30°). $AC^2=144-36=108$, deci $AC=6\sqrt{3}$ cm. Din aria triunghiului: $BC\cdot AD=AB\cdot AC$, deci $AD=6\cdot6\sqrt{3}:12=3\sqrt{3}$ cm.

4. Fie $BE\perp CD$, $E\in CD$. Atunci DE = AB = 6 cm și EC = 14 − 6 = 8 cm, iar BE = AD = 6 cm. $BC^2=6^2+8^2=100$, deci BC = 10 cm. Perimetrul = 6 + 14 + 6 + 10 = 36 cm.

5. M este mijlocul coardei, deci $AM=3\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul dreptunghic OMA: $OM^2=36-27=9$, deci OM = 3 cm.

6. Diagonala bazei: $AC^2 = 36 + 36 = 72$. Triunghiul ACC' este dreptunghic în C: $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 72 + 49 = 121$, deci $AC' = 11$ cm.

SUBIECTUL al III-lea — 30 de puncte

1. La un test cu 25 de probleme, pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 6 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greșit sau nerezolvată se scad 2 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.

(2p) **a)** Este posibil ca Mihai să obțină 130 de puncte? Justifică răspunsul dat.

Dacă Mihai rezolvă corect c probleme, punctajul este $6c - 2(25 - c) + 10 = 8c - 40$. **(1p)** Din $8c - 40 = 130$ rezultă $8c = 170$, deci $c = 21{,}25$, care nu este număr natural. Nu este posibil. **(1p)**

(3p) **b)** Dacă Mihai obține 120 de puncte, aflați câte probleme a rezolvat corect.

$8c - 40 = 120$ **(1p)**, deci $8c = 160$ **(1p)** și $c = 20$. Verificare: $20 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 10 = 120 - 10 + 10 = 120$. **(1p)**

2. Un bunic numără nucile dintr-un coș câte 4, câte 5 sau câte 6, iar de fiecare dată îi rămân 3 nuci.

(2p) **a)** Este posibil să fie 133 de nuci în coș? Justifică răspunsul dat.

Dacă numărul nucilor este n, atunci $n - 3$ se împarte exact la 4, 5 și 6, deci este multiplu comun al lor, adică multiplu de 60. **(1p)** Pentru $n = 133$: $133 - 3 = 130$ nu este multiplu de 60. Deci nu este posibil. **(1p)**

(3p) **b)** Dacă bunicul a adunat între 200 și 300 de nuci, determină câte nuci ar putea fi în coș.

Cel mai mic multiplu comun al lui 4, 5 și 6 este 60, deci $n - 3 = 60k$, adică $n = 60k + 3$. **(1p)** Din $200 < 60k + 3 < 300$ rezultă $197 < 60k < 297$, deci $k = 4$ ($3{,}28\ldots < k < 4{,}95\ldots$). **(1p)** Atunci $n = 60 \cdot 4 + 3 = 243$ de nuci. **(1p)**

3. Se consideră numerele $a = \sqrt{54} + \dfrac{6}{\sqrt{6}}$ și $b = (\sqrt{150} - \sqrt{24}) : 2$.

(2p) **a)** Arată că $a = 4\sqrt{6}$.

$\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ **(1p)** și $\dfrac{6}{\sqrt{6}} = \dfrac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$. Atunci $a = 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$. **(1p)**

(3p) **b)** Arată că media geometrică a numerelor a și b este un număr natural.

$\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ și $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, deci $b = (5\sqrt{6} - 2\sqrt{6}) : 2 = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. **(1p)** Media geometrică este $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} : 2}$ **(1p)** $= \sqrt{6 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$. **(1p)**

4. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul ABCD, cu $AB = 12$ cm și $BC = 8$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB, iar P este punctul de intersecție a dreptelor AC și DM.

(2p) **a)** Arată că $AP : PC = 1 : 2$.

$AM \parallel CD$ ($AB \parallel CD$), deci triunghiurile PAM și PCD sunt asemenea. **(1p)** Raportul de asemănare este $AM : CD = 6 : 12 = 1 : 2$, deci $AP : PC = 1 : 2$. **(1p)**

(3p) **b)** Calculează aria triunghiului ADP.

Din $AP : PC = 1 : 2$ rezultă $AP = AC : 3$. **(1p)** Triunghiurile ADP și ADC au aceeași înălțime dusă din D pe AC, deci ariile lor sunt proporționale cu bazele: $\text{aria}(ADP) = \text{aria}(ADC) : 3$. **(1p)** $\text{Aria}(ADC) = 12 \cdot 8 : 2 = 48$ cm², deci $\text{aria}(ADP) = 16$ cm². **(1p)**

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral REM, cu RE = 12 cm. Punctul U este mijlocul laturii RE, iar cercul de centru U și diametru RE intersectează laturile RM și EM în punctele S, respectiv T. Segmentele RT și ES se intersectează în punctul P.

2p **a)** Arată că perimetrul triunghiului REM este egal cu 36 cm.

Triunghiul REM este echilateral, deci RM = EM = RE = 12 cm. **(1p)** Perimetrul = 3·12 = 36 cm. **(1p)**

3p **b)** Demonstrează că MP = $4\sqrt{3}$ cm.

Unghiurile RSE și RTE sunt înscrise într-un semicerc (RE este diametru), deci ES ⊥ RM și RT ⊥ EM. **(1p)** ES și RT sunt înălțimi ale triunghiului echilateral, deci sunt și mediane, iar P este centrul de greutate. Atunci MP = $\frac{2}{3}$·MU. **(1p)** MU este înălțime în triunghiul echilateral: MU = $12\sqrt{3} : 2 = 6\sqrt{3}$ cm. Deci MP = $\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm. **(1p)**

6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată VABCD, cu toate muchiile de 12 cm. Punctul E este mijlocul muchiei VA, iar F este mijlocul muchiei VC.

2p **a)** Arată că dreptele EF și AC sunt paralele.

EF este linie mijlocie în triunghiul VAC. **(1p)** Prin urmare EF ∥ AC și EF = AC : 2. **(1p)**

3p **b)** Calculează aria patrulaterului AEFC.

AC = $12\sqrt{2}$ cm (diagonala pătratului ABCD). Cum $VA^2 + VC^2 = 144 + 144 = 288 = AC^2$, triunghiul VAC este dreptunghic isoscel în V, cu aria 12·12 : 2 = 72 cm². **(1p)** Triunghiul VEF este asemenea cu triunghiul VAC, cu raportul de asemănare 1 : 2, deci aria(VEF) = 72 : 4 = 18 cm². **(1p)** Aria(AEFC) = aria(VAC) − aria(VEF) = 72 − 18 = 54 cm². **(1p)**