Model de test nr. 6 · BAREM

nivel mediu

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se calculează împărțind la 10 punctajul total obținut. Subiectele I și II: 5 puncte pentru răspunsul corect, 0 puncte altfel. Subiectul al III-lea: punctajul se acordă conform baremului; orice altă rezolvare corectă se punctează echivalent.

SUBIECTUL I — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	c	c	b	b	c	F

1. $3\cdot(-2)^2 = 3\cdot 4 = 12$; $-5\cdot(-3) = 15$; $24 : (-6) = -4$. Deci $12 + 15 - 4 = 23$.

2. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+3+5} = \frac{60}{10} = 6$, deci $c = 5\cdot 6 = 30$.

3. După creștere, prețul este 120% din cel inițial. După scădere: 80% din 120% = $0{,}8\cdot 1{,}2 = 0{,}96 = 96\%$ din prețul inițial. Prețul a scăzut cu 4%.

4. $|x - 1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x - 1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$. Numerele întregi sunt $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, adică 7 numere.

5. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, deci $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, iar $(\sqrt{3})^2 = 3$.

6. $2 < \sqrt{5} < 3$, deci $-3 < -\sqrt{5} < -2$, iar $3 < \sqrt{11} < 4$. Numerele întregi din interval sunt $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, adică 6 numere, nu 7. Afirmația este falsă.

SUBIECTUL al II-lea — 30 de puncte

Item	1	2	3	4	5	6
Răspuns	b	a	a	b	b	b

1. MB = 3 cm și CN = 5 cm. Cum punctele sunt în ordinea M, B, C, N: MN = MB + BC + CN = 3 + 8 + 5 = 16 cm.

2. $m(\angle B) = m(\angle C) = (180° - 40°) : 2 = 70°$. Triunghiul BCD este isoscel (BD = BC), cu $m(\angle B) = 70°$, deci $m(\angle BCD) = (180° - 70°) : 2 = 55°$. Atunci $m(\angle ACD) = m(\angle ACB) - m(\angle BCD) = 70° - 55° = 15°$.

3. BC = 15 cm. Din aria triunghiului: $BC\cdot AD = AB\cdot AC$, deci $AD = 108 : 15 = 7{,}2$ cm. Din triunghiul dreptunghic ABD: $BD^2 = 81 - 51{,}84 = 29{,}16$, deci BD = 5,4 cm.

4. În triunghiul dreptunghic AED, $m(\angle ADE) = 30°$, deci AE = 3 cm și $DE^2 = 36 - 9 = 27$, adică $DE = 3\sqrt{3}$ cm. Aria = $AB\cdot DE = 10\cdot 3\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ cm².

5. Triunghiul AOB este isoscel. Fie $OM \perp AB$; M este mijlocul lui AB, deci $AM = 5\sqrt{3}$ cm, iar $m(\angle AOM) = 60°$. În triunghiul dreptunghic AOM, $m(\angle OAM) = 30°$, deci $OM = OA : 2$ și $OA^2 = OM^2 + AM^2$. Notând $OA = R$: $R^2 = R^2/4 + 75$, de unde $R^2 = 100$ și $R = 10$ cm.

6. Diagonala bazei: $AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, deci $AC = 5$ cm. Triunghiul ACC' este dreptunghic în C ($CC' \perp$ planul bazei): $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 25 + 144 = 169$, deci $AC' = 13$ cm.

SUBIECTUL al III-lea — 30 de puncte

1. La un concurs sunt 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 2 puncte. Toate întrebările primesc răspuns.

2p **a)** Este posibil ca un elev să obțină 95 de puncte? Justifică răspunsul dat.

Dacă elevul răspunde corect la c întrebări, atunci a greșit la $20 - c$, iar punctajul este $5c - 2(20 - c) = 7c - 40$. **(1p)** Din $7c - 40 = 95$ rezultă $7c = 135$, iar 135 nu se împarte exact la 7, deci c nu este număr natural. Nu este posibil. **(1p)**

3p **b)** Dacă un elev obține 58 de puncte, aflați la câte întrebări a răspuns corect.

$7c - 40 = 58$ **(1p)**, deci $7c = 98$ **(1p)** și $c = 14$. Elevul a răspuns corect la 14 întrebări (verificare: $14 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 70 - 12 = 58$). **(1p)**

2. Numerele 53, 77 și 101, împărțite la același număr natural n, de două cifre, dau același rest.

2p **a)** Verifică dacă n poate fi egal cu 5.

5 are o singură cifră, deci nu convine; în plus, 53 : 5 dă restul 3, iar 77 : 5 dă restul 2, resturile nefiind egale. Deci n nu poate fi 5. **(2p)**

3p **b)** Determină toate numerele n care verifică cerințele problemei.

Dacă 53, 77 și 101 dau același rest la împărțirea cu n, atunci n divide diferențele $77 - 53 = 24$ și $101 - 77 = 24$. **(1p)** Divizorii lui 24 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; de două cifre sunt 12 și 24. **(1p)** Verificare: $53 = 4 \cdot 12 + 5$, $77 = 6 \cdot 12 + 5$, $101 = 8 \cdot 12 + 5$; $53 = 2 \cdot 24 + 5$, $77 = 3 \cdot 24 + 5$, $101 = 4 \cdot 24 + 5$. Deci $n \in \{12, 24\}$. **(1p)**

3. Se consideră numărul $a = (\sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2) + 1$.

2p **a)** Arată că $a = 7$.

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ și $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, deci $(\sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. **(1p)** $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2) = 7 - 4 = 3$. Atunci $a = 3 + 3 + 1 = 7$. **(1p)**

3p **b)** Determină numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{N}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| < a\}$.

Cu $a = 7$: $|x - 3| < 7 \Leftrightarrow -7 < x - 3 < 7$. **(1p)** Adunăm 3: $-4 < x < 10$, deci $A = (-4, 10)$. **(1p)** Numerele naturale nenule din A sunt 1, 2, …, 9, adică 9 numere. **(1p)**

4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel ABCD, cu $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 22$ cm și $AD = BC = 10$ cm. Punctul E este piciorul perpendicularei din A pe CD.

2p **a)** Arată că înălțimea AE a trapezului este egală cu 8 cm.

În trapezul isoscel, $DE = (CD - AB) : 2 = (22 - 10) : 2 = 6$ cm. **(1p)** Din triunghiul dreptunghic AED: $AE^2 = AD^2 - DE^2 = 100 - 36 = 64$, deci $AE = 8$ cm. **(1p)**

3p **b)** Calculează lungimea diagonalei AC.

$EC = CD - DE = 22 - 6 = 16$ cm. **(1p)** Din triunghiul dreptunghic AEC: $AC^2 = AE^2 + EC^2 = 64 + 256 = 320$. **(1p)** Deci $AC = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ cm. **(1p)**

5. În figura alăturată este reprezentat pătratul ABCD, cu AB = 8 cm. Punctul M se află pe latura BC, astfel încât BM = 6 cm.

2p **a)** Arată că AM = 10 cm.

Din triunghiul dreptunghic ABM: $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 64 + 36 = 100$ **(1p)**, deci AM = 10 cm. **(1p)**

3p **b)** Calculează aria patrulaterului AMCD.

Aria pătratului ABCD este $8^2 = 64$ cm². **(1p)** Aria triunghiului ABM este $AB \cdot BM : 2 = 8 \cdot 6 : 2 = 24$ cm². **(1p)** Aria patrulaterului AMCD = 64 − 24 = 40 cm². **(1p)**

6. În figura alăturată este reprezentat cubul ABCDA′B′C′D′, cu AB = 6 cm. Punctul M este mijlocul muchiei BB′.

2p **a)** Arată că $AM = 3\sqrt{5}$ cm.

BM = BB′ : 2 = 3 cm. Muchia BB′ este perpendiculară pe planul (ABC), deci BB′ ⊥ AB. **(1p)** Din triunghiul dreptunghic ABM: $AM^2 = 36 + 9 = 45$, deci $AM = 3\sqrt{5}$ cm. **(1p)**

3p **b)** Calculează perimetrul triunghiului AMC.

Analog, $MC^2 = BC^2 + BM^2 = 36 + 9 = 45$, deci $MC = 3\sqrt{5}$ cm. **(1p)** AC este diagonala pătratului ABCD, deci $AC = 6\sqrt{2}$ cm. **(1p)** Perimetrul = $3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{5} + 6\sqrt{2}$ cm. **(1p)**